

No.:

## Tugas Pertemuan 22

Date:

☐ Buat Rangkuman : Sistem Persamaan Diferensial Orde 1 non-homogen

☐ ► Bentuk Umum

$$x'(t) = Ax(t) + b(t)$$

☐ Sama halnya PD non-homogen, sistem PD non-homogen ini memiliki penyelesaian Komplemen ( $x_c$ ) dan penyelesaian partikular ( $x_p$ ) dengan  $x_c \rightarrow$  Penyelesaian sistem PD homogen dari PD tersebut.

☐ Dengan bentuknya adalah :

$$x_c = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

☐ Sedang,  $x_p \rightarrow$  metode Variasi parameter.

☐ ► Penyelesaian Sistem PD non-homogen

☐ ① Penyelesaian Komplemen ( $y_c$ )

☐  $\Rightarrow$  Sama saja dengan penyelesaian PD homogennya.

☐ Yakni :

$$y_c = C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n$$

☐ ② Penyelesaian Partikular ( $y_p$ )

☐  $\Rightarrow$  Dengan metode VARIASI PARAMETER

☐ ✱ Metode Variasi Parameter

☐ Jika  $x_1, x_2, \dots, x_n$  adalah penyelesaian yang bebaslinear dari  $x' = Ax$  dan  $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]$  adalah matriks fundamental, maka penyelesaian partikularnya ( $y_p$ ) adalah :

$$y_p = x u$$

☐ dengan  $u$  diperoleh dari  $xu' = b$ . Atau secara eksplisit dapat ditulis

$$y_p = x(t) \int x^{-1}(s) b(s) ds$$

No.:

Date:

\* Asal Persamaan :

Asumsikan : Penyelesaian Partikular ( $y_p$ ) dari sistem PD non-homogen.

memiliki bentuk :

$$y_p = \mathcal{U}u$$

dengan :

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \quad \text{dan} \quad \mathcal{U} = [x_1, x_2, \dots, x_n]$$

Dengan substitusi  $\mathcal{U}_p$  ke sistem PD :

$$\mathcal{U}' = A\mathcal{U} + b$$

$$(\mathcal{U}u)' = A(\mathcal{U}u) + b$$

$$\mathcal{U}'u + \mathcal{U}u' = A(\mathcal{U}u) + b$$

Karena  $x$  memenuhi sistem PD Homogen  $x' = Ax$ , sehingga :

$$(Ax)u + xu' = A(xu) + b$$

$$xu' = b$$

$$u' = x^{-1}b$$

$$u(t) = \int^t x^{-1}(s) b(s) ds$$

maka :

$$y_p = x(t) u(t)$$

$$y_p = x(t) \int^t x^{-1}(s) b(s) ds$$

③ Penyelesaian Sistem Persamaan Diferensial Orde 1 non-homogen

$$y = y_c + y_p$$



☐ 1► Contoh Soal

☐ Halaman 166

☐ 10 Dengan variasi parameter, untuk memperoleh penyelesaian partikular  $x_p$  dari sistem  $x' = ax + b$ , dapatkan PUPD jika  $A$  dan  $b$  diberikan berikut.

☐ a).  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 20e^{3t} \\ 12e^t \end{bmatrix}$

☐ b).  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} -e^t \\ 6e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$

☐ Jawab

☐ 10 a).  $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ,  $b = \begin{bmatrix} 20e^{3t} \\ 12e^t \end{bmatrix}$

☐  $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda + 1 & -1 \\ -3 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0$

☐  $(\lambda + 1)(\lambda - 1) - (-3) = 0$

☐  $\lambda^2 - 1 - 3 = 0$

☐  $\lambda^2 - 4 = 0$

☐  $(\lambda + 2)(\lambda - 2) = 0$

☐  $\lambda = -2 \vee \lambda = 2$

☐ •> Saat  $\lambda = 2$ 

☐  $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow \underbrace{(b_1 + b_2)}_{=0} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0$

☐  $3[v_1]_1 - [v_1]_2 = 0$

☐  $3[v_1]_1 = [v_1]_2$

☐ \*  $[v_1]_1 = s \rightarrow [v_1]_2 = 3[v_1]_1$

☐  $= 3s$

☐  $\hookrightarrow$  Vektor eigen =  $s \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$

•> Saat  $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix} v_2 = 0 \implies \widetilde{-3B_1 + B_2} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} v_2 = 0$$

$$-[v_2]_1 - [v_2]_2 = 0$$

$$[v_2]_2 = -[v_2]_1$$

$$* [v_2]_1 = s \rightarrow [v_2]_2 = -s$$

$$\hookrightarrow \text{Vektor Eigen} = s \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\text{Matriks Fundamental} = \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 3e^{2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix}$$

1) Penyelesaian Komplen ( $y_c$ )

$$y_c = C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

PENYELESAIAN PARTIKULIR

$x' = Ax + b$  memiliki penyelesaian  $y_p = xu$ ,  
dengan  $u$  diperoleh dari  $xu' = b$

$$\Rightarrow xu' = b$$

$$\begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 3e^{2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20e^{3t} \\ 12e^t \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\left[ \begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{-2t} & 20e^{3t} \\ 3e^{2t} & -e^{-2t} & 12e^t \end{array} \right] \xrightarrow{-3B_1 + B_2} \left[ \begin{array}{cc|c} e^{2t} & e^{-2t} & 20e^{3t} \\ 0 & -4e^{-2t} & -60e^{3t} + 12e^t \end{array} \right] \xrightarrow{\frac{1}{4}B_2 + B_1}$$

$$\left[ \begin{array}{cc|c} e^{2t} & 0 & 5e^{3t} + 3e^t \\ 0 & -4e^{-2t} & -60e^{3t} + 12e^t \end{array} \right] \xrightarrow{-\frac{1}{4}(B_2)} \left[ \begin{array}{cc|c} e^{2t} & 0 & 5e^{3t} + 3e^t \\ 0 & 1 & 15e^{5t} - 3e^{3t} \end{array} \right]$$

$$\cdot > e^{2t} u_1' = 5e^{3t} + 3e^t \cdot e^{-2t}$$

$$\cdot > u_2' = 15e^{5t} - 3e^{3t}$$

$$u_1' = 5e^t + 3e^{-t}$$



No.:

Date:

$$u = \int \begin{bmatrix} 5e^t + 3e^{-t} \\ 15e^{5t} - 3e^{3t} \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} 5e^t - 3e^{-t} \\ 3e^{5t} - e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$y_p = Xu$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2t} & e^{-2t} \\ 3e^{2t} & -e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5e^t - 3e^{-t} \\ 3e^{5t} - e^{3t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5e^{3t} - 3e^t + 3e^{3t} - e^t \\ 15e^{3t} - 9e^t - 3e^{3t} + e^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8e^{3t} - 4e^t \\ 12e^{3t} - 8e^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 4e^t (2e^{2t} - 1) \\ 4e^t (3e^{2t} - 2) \end{bmatrix}$$

$$\text{PUPD : } y = y_c + y_p$$

$$= C_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + C_2 e^{-2t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4e^t (2e^{2t} - 1) \\ 4e^t (3e^{2t} - 2) \end{bmatrix}$$

$$b). \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -e^t \\ 6e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \rightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda + 3 & -2 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = 0$$

Dengan Metode Sarrus :

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ -2 & \lambda + 3 & -2 \\ -1 & 2 & \lambda - 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 \\ -2 & \lambda + 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\rightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 3)(\lambda - 2) + 0 + 0 - [0 + (\lambda - 1)(2)(-2) + 0] = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6) - (\lambda - 1)(-4) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 6 + 4) = 0$$

No.:

Date:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 2) = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda + 2) = 0$$

$$\bullet \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0 \rightarrow \sim \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} v_1 = 0$$

$$- [v_1]_1 + 2 [v_1]_2 - [v_1]_3 = 0$$

$$\text{misal : } [v_1]_1 = 2s$$

$$[v_1]_3 = 2k, \text{ maka :}$$

$$-2s + 2 [v_1]_2 - 2k = 0$$

$$2 [v_1]_2 = 2k + 2s$$

$$[v_1]_2 = k + s$$

$$v_1 = s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + k \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{maka, vektor eigen ketika } \lambda = 1 \text{ adalah } \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\bullet \lambda = -2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} v_2 = 0 \rightarrow \sim \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ -1 & 2 & -4 \end{bmatrix} v_2 = 0$$

$$-3 [v_2]_1 = 0 \rightarrow -3 [v_2]_2 + 6 [v_2]_3 = 0$$

$$[v_2]_1 = 0 \rightarrow - [v_2]_2 + 2 [v_2]_3 = 0 \rightarrow [v_2]_2 = 2 [v_2]_3$$

$$\rightarrow - [v_2]_1 + 2 [v_2]_2 - 4 [v_2]_3 = 0$$

$$[v_2]_2 = 2 [v_2]_3 \quad v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{misal : } [v_2]_3 = s, \text{ maka } [v_2]_2 = 2s$$

$$\text{Sehingga : vektor eigen yang diperoleh saat } \lambda = -2 \text{ adalah } \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$y_c = C_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + C_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + C_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$



No.:

Date:

$$\text{Matriks Fundamental} = \begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ e^t & e^t & 2e^{-2t} \\ 0 & 2e^t & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

### ► PENYELESAIAN PARTIKULIR

$X' = Ax + b$  punya penyelesaian partikular  $y_p = Xu$

dengan  $u$  diperoleh dari  $Xu' = b$

$$\Rightarrow Xu' = b \rightarrow \begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ e^t & e^t & 2e^{-2t} \\ 0 & 2e^t & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t \\ 6e^{-t} \\ e^t \end{bmatrix}$$

Penyelesaian :

$$\begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 & | & -e^t \\ e^t & e^t & 2e^{-2t} & | & 6e^{-t} \\ 0 & 2e^t & e^{-2t} & | & e^t \end{bmatrix} \xrightarrow{(-\frac{1}{2}e^{-t})b_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 \\ e^t & e^t & 2e^{-2t} & | & 6e^{-t} \\ 0 & 2e^t & e^{-2t} & | & e^t \end{bmatrix} \quad (-e^t)b_1 + b_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & e^t & 2e^{-2t} & | & \frac{1}{2}e^t + 6e^{-t} \\ 0 & 2e^t & e^{-2t} & | & e^t \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)B_2 + B_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -1/2 \\ 0 & e^t & 2e^{-2t} & | & \frac{1}{2}e^t + 6e^{-t} \\ 0 & 0 & -3e^{-2t} & | & -12e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow u_1' = -\frac{1}{2} \quad \rightarrow e^t(u_2') + 2e^{-2t}(u_3') = \frac{1}{2}e^t + 6e^{-t}$$

$$\rightarrow (u_3') - 3e^{-2t} = -12e^{-t}$$

$$(u_3') = -12e^{-t} \left(-\frac{1}{3}e^{2t}\right)$$

$$= 4e^t$$

$$(u_2')e^t + 2e^{-2t} \cdot 4e^t = \frac{1}{2}e^t + 6e^{-t}$$

$$(u_2')e^t + 8e^{-t} = \frac{1}{2}e^t + 6e^{-t}$$

$$(u_2')e^t = \frac{1}{2}e^t - 2e^{-t}$$

$$u_2' = \frac{1}{2} - 2e^{-2t}$$

$$u = \int \begin{bmatrix} -1/2 \\ \frac{1}{2} - 2e^{-2t} \\ 4e^t \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -1/2 t \\ \frac{1}{2} t + e^{-2t} \\ 4e^t \end{bmatrix}$$

No.:

Date:

$$y_p = XU$$

$$= \begin{bmatrix} 2e^t & 0 & 0 \\ e^t & e^t & 2e^{-2t} \\ 0 & 2e^t & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}t \\ \frac{1}{2}t + e^{-2t} \\ 4e^t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -te^t \\ \left(-\frac{1}{2}te^t\right) + \left(\frac{1}{2}te^t + e^{-t}\right) + 8e^{-t} \\ 0 + \left(e^t \cdot t + 2e^{-t}\right) + 4e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -te^t \\ 9e^{-t} \\ te^t + 6e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\text{PUDP : } y = y_c + y_p$$

$$= c_1 e^t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + c_2 e^t \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + c_3 e^{-2t} \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -te^t \\ 9e^{-t} \\ te^t + 6e^{-t} \end{bmatrix}$$

$$\equiv$$